Taban değiştirme özelliği kullanılırsa

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

olur. Eğer taban 10 olarak alınırsa logaritma fonksiyonuna adi logaritma denir ve $\log_{10} x$ yerine $\log x$ gösterimi kullanılır.

$$\Rightarrow \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

10) $\log_a x$ in grafiğine bakılırsa $a>1$ için

$$0<x<1 \Rightarrow \log_a x<0$$

$$1<x \Rightarrow \log_a x>0$$

dır. Benzer şekilde $0<a<1$ için

$$0<x<1 \Rightarrow \log_a x>0$$

$$1<x \Rightarrow \log_a x<0$$

dır.

Örnek: $\log_2(x^2-3x+3)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım:

$2>0 \Rightarrow \log_2(x^2-3x+3)>0$ olması için $x^2-3x+3>1$ olmalı

$\Rightarrow x^2-3x+2>0 \Rightarrow (x-2)(x-1)>0 \Rightarrow ÇK=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$

Örnek: $\log_{1/3}(5x-1)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım:

$0<\frac{1}{3}<1 \Rightarrow \log_{1/3}(5x-1)>0$ olması için $0<5x-1<1$ olmalı

$\Rightarrow 1<5x<2 \Rightarrow \frac{1}{5}<x<\frac{2}{5} \Rightarrow Ç.K=\left(\frac{1}{5},\frac{2}{5}\right)$

11) $\log_a x$ in grafiğine bakarsak;

$a>1 \Rightarrow x$ ler büyüdükçe $\log_a x$ de büyüyor

$\Rightarrow \log_a x$ artandır.

$0<a<1 \Rightarrow x$ ler büyüdükçe $\log_a x$ küçülüyor

$\Rightarrow \log_a x$ azalandır.

Örnek: $a=\ln 2$, $b=\ln 3$, $c=\ln 5$ ise $\ln 1080$ in a,b,c cinsinden değerini bulalım.

$$\ln 1080 = \ln(2^3 3^3 5) = \ln 2^3 + \ln 3^3 + \ln 5 = 3\ln 2 + 3\ln 3 + \ln 5$$
$$= 3a + 3b + c$$

Örnek: $f(x) = \ln\frac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow$

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow TK: (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$

Örnek: $5^{\ln x} + 5^{1-\ln x} = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$5^{\ln x} + \frac{5}{5^{\ln x}} - 6 = 0$. $5^{\ln x} = t$ olsun.

$\Rightarrow t + \frac{5}{t} - 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t-5)(t-1) = 0$

$\Rightarrow t = 5,\ t = 1 \Rightarrow 5^{\ln x} = 5,\ 5^{\ln x} = 1 \Rightarrow \ln x = 1,\ \ln x = 0$

$\Rightarrow x = e\ ,\ x = 1 \Rightarrow ÇK = \{1, e\}$.

Hiperbolik fonksiyonlar

Simetrik bir küme üzerinde tanımlanan her fonksiyonu biri çift diğeri tek olan iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edebiliriz. Gerçekten de

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}\ ,\quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

olmak üzere

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g(-x) = g(x)$ ve $h(-x) = -h(x)$ olup g çift, h ise tek fonksiyondur.

Tanım: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ fonksiyonunun çift kısmına yani $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna hiperbolik kosinüs fonksiyonu, tek kısmına, yani $\frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna da hiperbolik sinüs fonksiyonu denir. Böylece

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

şeklinde tanımlanır. Bunlardan yararlanarak

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

olarak tanımlanır.

Hiperbolik fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler vardır:

1) $e^x = \sinh x + \cosh x$ olduğundan $e^{nx} = (\sinh x + \cosh x)^n$ olur.

2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

3) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$, 61

4) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$

5) $\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$, $\coth^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$

6) $\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \sinh y \cosh x$

7) $\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$

Ters hiperbolik fonksiyonlar

$\sinh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, birebir ve örten fonksiyon olup tersi vardı

$$y = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow e^x - e^{-x} - 2y = 0$$

$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0$. $e^x = t$ dersek $t^2 - 2yt - 1 = 0$ olur.

Bu denklemin diskriminantı $\Delta = 4y^2 + 4$ olup kökler

$t_{1,2} = \frac{2y \mp \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \mp \sqrt{y^2+1}$. $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ olursa

$e^x > 0$ olduğu için $e^x \neq y - \sqrt{y^2+1}$ olur. O halde $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

olup $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ dir.

$$\Rightarrow \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$$

Benzer işlemler yapılarak

$\cosh^{-1} : [1,\infty) \to [0,\infty)$, $\cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$

$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x \notin [-1,1]$

olduğu gösterilebilir.

Örnek: $\operatorname{sech}^{-1}x$ i bulalım.

$y = \operatorname{sech}x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \cosh x$

$\Rightarrow \cosh^{-1}\frac{1}{y} = x \Rightarrow \operatorname{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1}{x} = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)$

Benzer şekilde

$\operatorname{cosech}^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$ ve $\coth^{-1}x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$

olduğu gösterilebilir.

Örnek: $\sinh x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım

$\sinh x = 3 \Rightarrow \frac{e^x-e^{-x}}{2} = 3 \Rightarrow e^x - e^{-x} - 6 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 6e^x - 1 = 0$

$e^x = t$ dersek $t^2 - 6t - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 40$, $t_{1,2} = \frac{6 \mp \sqrt{40}}{2}$

$= 3 \mp \sqrt{10}$

$3-\sqrt{10} < 0$ olduğu için $e^x \neq 3-\sqrt{10}$ olup $e^x = 3+\sqrt{10}$ olur.

$\Rightarrow x = \ln(3+\sqrt{10})$

Aynı problemi $\sinh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2+1})$ olduğunu kullanarak

$\sinh x = 3 \Rightarrow x = \sinh^{-1}3 = \ln(3+\sqrt{10})$

olarak da çözebiliriz.

Örnek: $\sinh x = -\frac{3}{4}$ olduğuna göre $\cosh x, \tanh x, \coth x, \operatorname{sech}x$, $\operatorname{cosech}x$ değerlerini bulalım.

$\cosh^2x - \sinh^2x = 1 \Rightarrow \cosh^2x = 1+\sinh^2x = 1+\frac{9}{16} = \frac{25}{16}$

$\Rightarrow \cosh x = \frac{5}{4}$ ($\cosh x > 0$ olacağı için $\cosh x \neq -\frac{5}{4}$)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{-3/4}{5/4} = -\frac{3}{5}, \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = -\frac{5}{3}$$

$$\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{4}{5}, \quad \text{cosech}\, x = \frac{1}{\sinh x} = -\frac{4}{3}$$

Örnek: $2\cosh(\ln x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$2\cosh(\ln x) = \cancel{2}\,\frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{\cancel{2}} = x + e^{\ln \frac{1}{x}} = x + \frac{1}{x}$$

Örnek: $\sinh(2\ln x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$\sinh(2\ln x) = \frac{e^{2\ln x} - e^{-2\ln x}}{2} = \frac{e^{\ln x^2} - e^{\ln x^{-2}}}{2} = \frac{x^2 - x^{-2}}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

Örnek: $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$ ifadesinin eşitini bulalım

$$\cosh x + \sinh x = e^x, \quad \cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow \ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x) = \ln e^x + \ln e^{-x} = x - x = 0$$

Limit ve Süreklilik

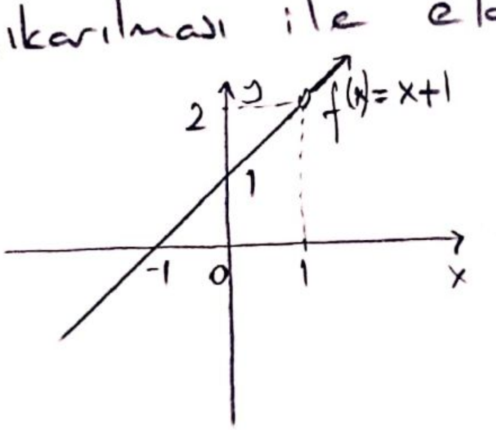
Limit kavramını vermeden önce şu örneği inceleyelim:

Örnek: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$.

Fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R} - \{1\}$ dir.

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$$

$\Rightarrow$ f'in grafiği $y = x+1$ doğrusundan $(1,2)$ noktasının çıkarılması ile elde edilir. Acaba fonksiyon $x=1$ de tanımlı olsaydı $f(1)$ değeri ne olurdu?



Bu soruya cevap verebilmek için 1 e çok yakın noktalarda f'in değerine bakmalıyız.

Bir tablo oluşturarak f değerlerini gözlemleyelim:

x	0,99	0,999	0,9999	1	1,0001	1,001	1,01
$f(x)$	1,99	1,999	1,9999		2,0001	2,001	2,01

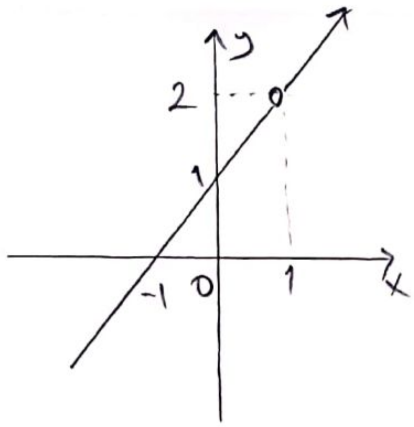
$\longrightarrow$ $\longleftarrow$

Tabloda görüldüğü gibi x 1e yaklaştıkça $f(x)$ değerleri de 2 ye yaklaşmaktadır. Bu durumu

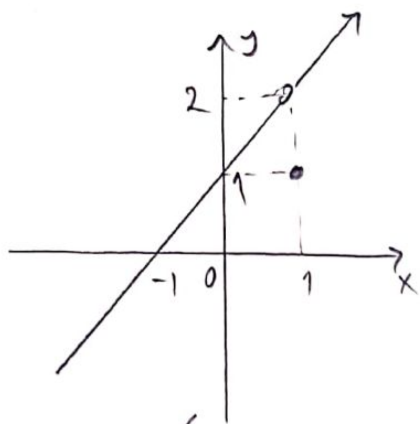
$$\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \quad \text{veya} \quad \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

ile gösteririz.

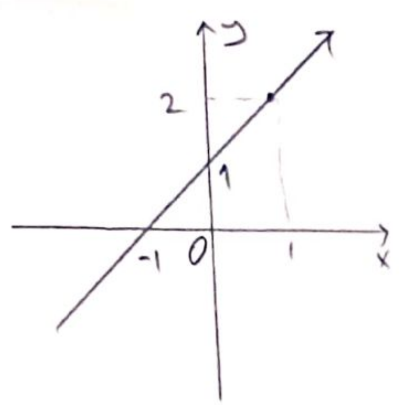
Uyarı: Fonksiyonun bir noktadaki limiti o nokta fonksiyonun tanımlı olup olmamasına bağlı değildir.



$f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$



$g(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$



$h(x) = x+1$

Yukarıda verilen f, g ve h fonksiyonlarının x 1e yaklaşırken limitleri 2 dir. Halbuki, $x=1$ de sadece $h(x)$ in değeri limiti ile aynıdır.

Şimdi limit tanımını verelim:

Tanım: $A \subset \mathbb{R}$, $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonunun x_0 noktasındaki limiti L dir denir ve $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ yazılır.

Uyarı: $0<|x-x_0|<\delta$ ifadesinden anlaşılacağı üzere x hiçbir zaman x_0 a eşit olmaz. Dolayısıyla bir f fonksiyonunun x_0 daki değeri ile ilgilenmiyoruz.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 3} 2x-5=1$ olduğunu gösterelim.

$\varepsilon>0$ verilsin. $0<|x-3|<\delta$ olduğunda $|f(x)-1|<\varepsilon$ olacak şekilde $\delta>0$ bulmalıyız.

$$|f(x)-1| = |2x-5-1| = |2x-6| = 2\underbrace{|x-3|}_{<\delta} < 2\delta$$

$\Rightarrow \delta=\dfrac{\varepsilon}{2}$ olarak seçilirse $|f(x)-1|<2\delta=2\dfrac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$

$\Rightarrow |f(x)-1|<\varepsilon$

Teorem: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$ olmak üzere

1) $\lambda\in\mathbb{R}$ için $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f)(x)=\lambda \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lambda L_1$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\mp g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\mp g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\mp \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_1\mp L_2$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x))=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_1 L_2$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}=\dfrac{L_1}{L_2}$, $(L_2\neq 0)$

5) $f(x)$ polinom ise $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 2}(2x^2-3x+5)=2.2^2-3.2+5=7$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^2+x-4}{3x+2}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}(2x^2+x-4)}{\lim\limits_{x\to 1}(3x+2)}=\dfrac{2.1^2+1-4}{3.1+2}=-\dfrac{1}{5}$

Sıkıştırma (Sandviç) Teoremi: $A\subset\mathbb{R}$, $f,g,h: A\to\mathbb{R}$
Her $x\in A$ için $f(x)\le g(x)\le h(x)$ ve $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=L$ ise $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L$ olur.